|  |  |
| --- | --- |
| Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике2022 - 2023 учебный год | 8 класс |

**Ключи ответов**

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается. Общая оценка за весь этап получается суммированием оценок по каждому из заданий.

 Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

*1. Из трехзначного числа М, не содержащего в записи нулей, получили двузначное число С, записав вместо первых двух цифр их сумму (например, число 136 превращается в 46). Найдите М, если известно, что М=3С.*

Ответ:135.

Решение.

Последняя цифра у чисел С и М =3С одинакова, поэтому эта цифра 5. Кроме того, А делится на 3, значит, В делится на 3 (у М и С – одинаковые суммы цифр).

То есть, С – это одно из чисел 15, 45, 75.

Проверкой получаем, что условию удовлетворяет число С= 45, значит М=135

*2. Том Сойер и Гекльберри Финн, брели домой вверх по течению реки Миссисипи со скоростью, в полтора раза большей, чем скорость течения. Оживленно беседуя и размахивая руками, Гек не заметил, как на ходу выбросил свою шляпу в реку и продолжал движение к дому. Некоторое время спустя мальчики заметили потерю шляпы, Том быстро выбросил в реку палку, которую постоянно крутил в руках, и мальчики побежали назад со скоростью вдвое большей той, с какой шли вперед. Догнав плывущую шляпу, Гек мгновенно достал ее из воды, и мальчики повернулись и пошли домой с прежней скоростью. Через 40 секунд после того, как они догнали шляпу, им встретилась палка, плывущая навстречу. Насколько раньше вернулись бы домой мальчики, если бы они все время шли вперед?*

Ответ: на две с половиной минуты.

Решение.

Пусть мальчики бежали назад t секунд. Тогда палка плыла назад (t+40) секунд. Обозначим скорость течения ручья *v*. Тогда скорость ходьбы равна 1,5*v*; бега - 3*v*. Расстояние, которое пробежали мальчики назад, равно расстоянию, которое плыла палка до встречи с ними, плюс расстояние, которое они шли вперед, выловив шляпу, до встречи с палкой:

3*v*t = 1,5*v·*40*+v*(t+40), t = 50 секунд. Время, которое они потеряли, равно 50 секунд плюс время, которое им потребовалось, чтобы пройти то же расстояние, а оно вдвое больше.

Итак, 50+50·2=150 секунд или 2,5 минуты.

*3. Середина одной из биссектрис треугольника является серединой отрезка, соединяющего основания высоты и медианы, проведенных из двух других вершин треугольника. Найти углы этого треугольника.*

Ответ: $60^{0}$,$ 60^{0}$,$ 60^{0}$.

Решение. Пусть N середина биссектрисы ВL, AH и СМ соответственно высота и медиана треугольника АВС. Тогда ВMLH – параллелограмм (диагонали делятся точкой пересечения пополам). Прямая, проходящая через середину М стороны АВ, параллельно стороне ВС треугольника является средней линией. Поэтому ML – средняя линией. Поэтому ML - средняя линия треугольника ВАС, то есть точка L - середина АС. Тогда и LH – средняя линия треугольника АВС. Значит, биссектриса BL и высота AH являются также медианами треугольника АВС. Следовательно, АВ=ВС, ВА=АС и треугольник АВС – равносторонний, и углы равны по $60^{0}$.

*4. Чтобы визуально расширить пространство квадратного холла, используют крупноформатные светлые однотонные плиты двух размеров 2х2 и 3х1. При каких размерах холла можно так выложить пол, чтобы было использовано одинаковое количество плит каждого размера? Укажите наименьший размер холла. (Симметрия раскладки плит при укладке пола может не соблюдаться, резать плиты нельзя).*

Ответ. Наименьшая длина стороны квадратного пола равна 7, в общем виде длина стороны должна делиться на 7.

Решение. Пусть использовали по х плит каждого вида. Тогда площадь, занятая плитами, равна 4х +3х =7х = n2, n – длина стороны холла. Значит, длина n должна делиться на 7. Если же n делится на 7, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что квадрат 7х7 можно уложить, используя по 7 плиток каждого вида (см. рис.), т.е. наименьшая длина квадратного пола равна 7, в общем виде квадрат 7к х 7к можно разрезать на квадраты 7х7.

*5. На столе донышками вниз стоит 1001 стакан. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевернутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть не более одного стакана, за второй – не более двух и т. д. При этом за каждый ход необходимо перевернуть хотя бы один стакан. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы расположены донышками вверх. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?*

Ответ: выигрывает второй.

Решение. Опишем стратегию второго игрока. Пусть второй переворачивает обратно те стаканы, которые перевернул первый до тех пор, пока первый не сделает свой 500 –й ход. Тогда перед ходом первого каждый раз все 1001 стакан стоят донышками вниз. И первый имеет право перевернуть каждым своим ходом не более 999 стаканов (ровно 999 ему можно будет перевернуть только при своем 500 – м ходе). Тогда пусть первый при своем 500 – м ходе перевернул несколько (не более 999) стаканов. Остались неперевернутыми не более 1000 стаканов. $A$ так как второму своим ходом можно перевернуть 1000 стаканов или меньше, то он просто переворачивает оставшиеся стаканы и выигрывает.