|  |  |
| --- | --- |
| Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике2022 - 2023 учебный год | 9 класс |

**Ключи ответов**

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается. Общая оценка за весь этап получается суммированием оценок по каждому из заданий.

 Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

*1. У фокусника есть набор из 122 различных карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая - синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 12. Назовем карточку дублем, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?*

Ответ:1386.

Решение.

Так как в наборе $12^{2}$ карточек, у фокусника есть все возможные варианты карточек (для каждой пары ($x ;y)$, где $1\leq x\leq 12$, $1\leq y\leq 12$, найдется карточка, у которой на красной стороне написано число $x$, а на синей – $y$). Рассмотрим два вида наборов карточек.

1. Обе карточки являются дублями (таких карточек – 12 штук). Количество способов выбрать пару карточек равно $C\_{12}^{2}=\frac{12∙\left(12-1\right)}{2}=66$.

2. Только одна из карточек является дублем, Тогда ее можно выбрать 12 способами, после чего вторую карточку можно выбрать любую, за исключением: $(а) $всех дублей (таковых 12, с учетом уже выбранной карточки), $(б)$ всех карточек, имеющих тот же номер на красной стороне, что и выбранный дубль (таких 11, помимо выбранной карточки), $(в) $всех карточек имеющих тот же номер на синей стороне, что и выбранный дубль (также 11). Итак, вторую карточку можно выбрать $12^{2}-12-11-11=110$ способами. Значит, в этом случае имеем 12$∙110=1320$ способов выбрать пару карточек.

Итак, всего есть 66+1320=1386 способов.

*2. Три друга решили организовать ферму по производству молочной продукции. Для этого они купили для фермы коров Красной степной породы молочного направления. Алексей купил для фермы 30 коров, Борис 50 коров той же породы, а Владимир внес в предприятие 24 тысячи долларов. Известно, что Алексей и Борис могут поделить эти деньги между собой так, что вклад в общее дело каждого из трех друзей будет одинаковым. Сколько денег полагается Борису? Ответ дать в тысячах долларов.*

Ответ: 21.

Решение. Каждый из компаньонов должен внести столько же, сколько Владимир, то есть, 24 тысячи долларов. Если Борис заберет $t$ тысяч долларов, то Алексею останется $(24 – t) $тысяч долларов.

Поэтому $30 x -(24 –t) =24$ и$ 50 x – t=24, $ где $x$– стоимость одной коровы

Решая систему $\left\{ \begin{array}{c}30x-(24-t)=24,\\50 x – t=24;\end{array}\right.$

Получим $x =0,9; t =21.$

*3. Точка D - середина стороны* $АС$ *треугольника* $АВС,$$DE$ *и* $DF$ *- биссектрисы треугольников* $АВD,$ *и* $CBD.$ *Отрезки* $BD и EF$ *пересекаются в точке* $M.$ *Докажите, что*$ DM =\frac{1}{2}EF$*.*

Решение.

По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD:DА и BD:DC=BF :FC,$но $AD=DC$*,* значит $BE :EA = BF : FC.$

Следовательно, $EF ∥AC,$ откуда $EM : MF = AD :DC = 1:1,$ то есть

*DM* –медиана треугольника *EDF*.

Но$ ∠ EDF = ∠EDB +∠FDB = \frac{1}{2}∠ADB +\frac{1}{2}∠CDB =\frac{1}{2}(∠ADB +∠CDB)= 90^{0}$.

Таким образом, *DM =* $\frac{1}{2}$*EF* – по свойству медианы прямоугольного треугольника.

*4. На внеурочном занятии по математике в 9 классе школьники готовились к экзаменам и решали задачи по теории чисел. Учитель написал на доске одиннадцать натуральных чисел и предложил школьникам записать в своих тетрадях наибольшие общие делители каждой пары этих чисел. После сравнения и проверки полученных результатов оказалось, что любое число, написанное учителем на доске, встречается и в каждой тетради школьника. Какое наибольшее количество различных чисел (из 11 предложенных) могло быть написано учителем на доске?*

Ответ: 10.

Решение.

 Для любых натуральных чисел$ A\geq B$ выполняется неравенство: НОД$ (A, B)\leq A,$ причем равенство выполняется только в том случае, когда$ A=B.$

Пусть $A\geq B$ – два самых больших числа записанных учителем на доске. Тогда в тетрадях школьников число $A$ может появиться только в одном случае, когда $A=B;$ НОД всех других пар чисел будет меньше $A$. Значит, на доске записано не более 10 различных чисел. Например, 10 таких различных чисел – 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 могут быть записаны на доске и в тетрадях у школьников, одиннадцатое число на доске – 1024.

*5. Числовые палиндромы – это натуральные числа, которые одинаково читаются справа налево и слева направо, т.е. отличаются симметрией записи (расположения цифр), например, 121; 676; 1331; 4884; 94949; 1178711 – палиндромы, а числа 1231, 1212, 1010 не являются палиндромами. Определите, каких палиндромов среди чисел от 10000 до 999 999 больше – с нечетной суммой цифр или с четной, и во сколько раз?*

Ответ. Палиндромов с четной суммой цифр больше в 3 раза.

Решение. Заметим, что палиндром с 5 цифрами выглядит как $\overbar{abcba}$, а с 6 цифрами как $\overbar{abcсba}$. Каждый из этих палиндромов однозначно восстанавливается по первым трем цифрам $\overbar{abc}$*.* Это означает, что и палиндромов с 5 цифрами, и палиндромов с 6 цифрами столько же сколько и чисел $\overbar{abc}$от 100 до 999 , т.е. 900. Заметим, что любой палиндром с 6 цифрами имеет четную сумму цифр $2(a+b+c). $ Сумма цифр палиндрома с 5 цифрами есть $2(a+b)+c$, то есть зависит только от четности цифры *с.* Значит, при любых фиксированных $a и b$ существует пять (четных) цифр *c*, для которых $2(a+b)+c$ четно, и пять (нечетных) цифр *c* для которых $2(a+b)+c$ нечетно. Поэтому, палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна, столько же, сколько палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр четна (их по 450). А значит, палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна, в 2 раза меньше, чем палиндромов с 6 цифрами. Итак, палиндромов от 10000 до 999999 с четной суммой цифр больше, чем с нечетной, причем ровно в 3 раза.