|  |  |
| --- | --- |
| Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике2023 - 2024 учебный год | 9 класс |

**Критерии оценивания выполнения олимпиадных заданий**

**по математике в 9 классе**

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается.

 Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

1. Вычислите $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+…+2017\sqrt{1+2018∙2020}}}}$ .

**Решение.**

Поскольку 2018 ∙ 2020 = 20192 – 1, 2017 ∙ 2019 = 20182 – 1, …, получаем

$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+…+2017\sqrt{1+2018∙2020}}}}$ =$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+…+2016\sqrt{1+2017∙2019}}}}$ = …

= $\sqrt{1+2∙4}$=3.

**Ответ:** 3.

2. Два друга катаются на мотороллерах по новым дорогам, проложенным между селениями, где живут их родственники и друзья. Скорость передвижения каждого мальчика постоянна. Селения A, B, С, D, E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Друзья выехали утром одновременно из A в D и из C в E и повстречались в пути. Через некоторое время, так же одновременно они продолжили каждый свой путь, один из D в B, другой из E в C, и вновь повстречались в пути. Наконец, в 18:00 они выехали из B в E и из C в B, прибыв в пункты назначения в одно и то же время. Найдите ВС, если АЕ = 2км, CD = 4км.



**Решение.**

Пусть при первом заезде друзья встретились в точке Х. Так как отрезки АD и СЕ – хорды одной окружности, то треугольники АХЕ и СХD подобны. Следовательно, отношение скоростей мотороллеров равно $\frac{АХ}{СХ}=\frac{АЕ}{СD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ .

Если скорость первого мотороллера, выехавшего из пункта А, равна V, то скорость второго, выехавшего из С равна 2V.

Пусть при втором заезде мотороллеры встретились в точке У.

Так как треугольники ВYЕ и СYD подобны, то $\frac{СD}{ВЕ}=\frac{DУ}{ЕУ}=\frac{V}{2V}=\frac{1}{2}$ , поэтому ВЕ = 2СD = 8.

Наконец, при третьем заезде $\frac{ВС}{2V}=\frac{BE}{V}$, откуда получаем ВС = 2ВЕ = 16 (км).

**Ответ:**16 км.

3. В четырехугольник АВСD со сторонами АВ = 2, ВС = 4, СD = 5 вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырехугольника.

**Решение 1.**

Так как в четырехугольник можно вписать окружность, то

DА = 2 + 5 – 4 = 3

(АВ + СD = СВ + АD).

Так как четырехугольник вписанный, то

S = $\sqrt{\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\left(p-d\right)}$.

Но так как он описанный, то p = a + c = b + d (p – полупериметр). Отсюда получается S = $\sqrt{abcd}$ = $\sqrt{2∙3∙4∙5}$ = 2$\sqrt{30}$.

**Решение 2.**

AC, BD – диагонали. Так как четырехугольник вписанный, то

$∠$ В +$∠$ D =$∠$ А + $∠$С = 1800, $∠$D =1800 - $∠$В.

По теореме косинусов:

 АС2 = АВ2 + ВС2 – 2АВ ∙ ВС ∙ cos$∠$В = 22 + 42- 2 ∙ 2 ∙ 4 cos$∠$В = 20 – 16 cos$∠$В.

Аналогично,

АС2 = АD2 + DС2 – 2АD ∙ DС ∙ co$s∠$D = 32 + 52 - 2∙3∙5 cos$∠$D = 34 - - 30cos(1800-$∠$В) = 34+30 cos$∠$В

20 - 16cos$∠$В = 34 + 30 cos$∠$В

46 co$s∠$В = -14, cos$∠$В = - $\frac{7}{23}$ , sin$∠$В = $\frac{4\sqrt{30}}{23}$, sin$∠$D = sin (1800-$∠$В) = sin$∠$В

SABCD = S∆ABC + S∆ADC = $\frac{1}{2}$ AB ∙ BC sin$∠$В +$\frac{1}{2}$ AD ∙ DC sin$∠$D = $\frac{1}{2}$ ∙ 2 ∙ 4 ∙ $\frac{4\sqrt{30}}{23}$+ + $\frac{1}{2}$ ∙ 3 ∙5 ∙$\frac{4\sqrt{30}}{23}$ = $\frac{16\sqrt{30}}{23}$ + $\frac{30\sqrt{30}}{23}$ = $\frac{46\sqrt{30}}{23}$ = 2$\sqrt{30}$

**Ответ:** 2$\sqrt{30}$.

4. В числе 2\*0\*1\*6\*0\*2\* нужно заменить каждую из 6 звездочек на любую из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.**

Для того, чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того, чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа). Теперь на оставшиеся пять мест нужно расставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 9. Для этого выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать 9 ∙ 9 ∙ 9 ∙ 9 способами), а пятую цифру подберем так, чтобы сумма всех цифр делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, … 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом (например, если сумма всех цифр, кроме последней, равна 50, то в качестве последней цифры выбираем 4, чтобы итоговая сумма цифр делилась на 9). Применяя правило произведения, получаем, что всего

2 ∙ 9 ∙ 9 ∙ 9 ∙ 9 ∙ 1 =13122 способа.

**Ответ:** 13122 способа.

5. Маша и Саша играют в настольную игру. Ходят по очереди.Маша ходит первая и за один ход может взять со стола любое нечетное число монет, но не более 99 штук, а Саша – любое четное число монет, но не более 100 штук. Всего в игре задействована 2001 монета. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из ребят сможет выиграть при правильной игре?

**Решение.**

Опишем стратегию Маши. Первым ходом она должна взять со стола 81 монету. Каждым следующим ходом, если Саша берет х монет, она должна взять (101 – х) монет (она всегда может это сделать, потому что, если х – четное число от 2 до 100, то (101- х) - нечетное число от 1 до 99). Так как, 2001 = 101 ∙ 19 + 81 + 1, то через 19 таких «ответов» после хода Маши на столе останется 1 монета, и Саша не сможет сделать ход, то есть проигрывает.

**Ответ:** выигрывает Маша.