|  |  |
| --- | --- |
| Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике2022 - 2023 учебный год | 10 класс |

**Ключи ответов**

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается. Общая оценка за весь этап получается суммированием оценок по каждому из заданий.

 Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

*1. Чему равна сумма цифр числа А = 10040 – 10030 + 10020 – 10010 + 1?*

Ответ: 361.

Решение. Число равно сумме следующих трех чисел: числа, составленного из 20 девяток, после которых следуют 60 нулей; числа из 20 девяток, после которых следуют 20 нулей; наконец 1. Все девятки и единица приходятся на нули в других слагаемых, поэтому переноса разрядов при сложении не происходит, и сумма цифр равна 180 + 180 + 1 = 361.

*2. Температура воды Азовского моря в октябре 2021 года не превышала 170С. Экспедиция ученых - гидрологов в этот период проводила исследование моря, в том числе, замеряла температуру воды в различных его точках. Температура измерялась с точностью до одной десятой градуса. Данные замеров вносились в компьютер. Из-за шторма на море и возникшей качки судна один раз вместо десятичной запятой ученый, вносивший данные, нажал клавишу «0», а другой раз вообще не нажал десятичную запятую. После упорядочивания данных получился ряд из тридцати двух чисел, начинающихся числами 12,2; 12,8;… Если из полученного ряда удалить два первых числа, то среднее арифметическое оставшихся равно 68,8. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 13,7. Определите, в каких числах, и какие ошибки допустил ученый-гидролог.*

Ответ: ученый-гидролог ошибся в числе 16,9, пропустив запятую, и в числе 15,9, поставив вместо запятой «0».

Решение. Очевидно, что в результате упорядочивания два числа с ошибками должны оказаться последними. Обозначим эти два числа а и b. Тогда ряд будет выглядеть так: 12,2; 12,8; х3, х4, …х30; *а; b.* Следовательно, $\frac{х\_{3}+х\_{4}+∙∙∙+х\_{30 }+a+b}{30}-\frac{12,2+12,8+х\_{3}+х\_{4}+∙∙∙+х\_{30 }}{30}=$ 68,8 – 13,7 = 55,1

Отсюда, $\frac{а+b}{30}$ $-\frac{12,2+12,8}{30}$ = 55,1; *а + b* = 1678; Обозначив неизвестные цифры в числах *а* и *b* буквами, получим, *а* = $\overline{1mp}$ , *b*=$\overline{1noq}$ . Если p + q = 8 , то m + 0 =7, тогда, *а* $\geq $ 170, что невозможно, поскольку все измерения показывали ниже 170. Следовательно, p + q = 18, откуда p = q = 9, тогда, а =169, *b* =1509.

*3. В остроугольном треугольнике АВС проведены высоты АА1 и СС1, и отмечены точки К, L и М – середины сторон АВ, ВС и СА соответственно. Треугольник АВС неравнобедренный. Докажите, что если* $∠$*С1МА1=*$∠$*АВС, то С1К=А1 L.*

Решение.

Отрезок С1М является медианой прямоугольного треугольника СС1А, поэтому С1М = $\frac{АС}{2}$ = МА.

Тогда $∠$С1МА = 1800 - 2 $∠$ВАС. Аналогично, $∠$А1МС = 1800 - 2 $∠$ВСА. Отсюда, $∠$С1МА + $∠$А1МС = 2( 1800 - $∠$ВАС - $∠$ВСА) = 2 $∠$АВС, а тогда $∠$А1МС1 =1800 – ($∠$АМС1 + , $∠$СМА1) =1800 – 2 $∠$АВС.

Из условия следует, что $∠$ С1МА1 = $∠$АВС, то есть $∠$АВС = 1800 – 2 $∠$АВС.

Отсюда 3 $∠$АВС = 1800 , $∠$АВС = 600 . По условию, треугольник АВС – неравнобедренный, пусть, например, АВ < ВС.

Тогда из прямоугольного треугольника АВА1 получаем ВА1 = ВА cos 600 = $\frac{AB}{2}<BL$ Значит, A1L = BL – BA1 = $\frac{BC -AB}{2}$.

Аналогично, ВС1 = $\frac{BC }{2}$ > ВК и КС1 = ВС1 – ВК = $\frac{BC -AB}{2}$ = А1L , что и требовалось доказать.

*4. На внеурочном занятии по математике в 10 классе школьники готовились к экзаменам и решали задачи по теории чисел. Учитель записал на доске три различных положительных числа, и предложил первой группе школьников записать три числа – попарные суммы записанных на доске чисел, а второй группе записать три числа, обратных к числам, написанным на доске. После сравнения полученных результатов, учитель попросил доказать в общем виде, что числа, записанные каждой группой по такому же алгоритму, никогда не совпадут. Докажите и вы это утверждение.*

Доказательство.

Пусть на доске написаны числа *а, в, с,* для которых выполняются неравенства 0 < *а < в < с.*

 Тогда для чисел, записанных первой группой, выполняются неравенства: *а + в < а + с < в + с*, а для чисел, записанных второй группой, выполняются неравенства: $\frac{1}{с}<\frac{1}{в}<\frac{1}{а} .$

Предположим, что числа, записанные первой и второй группой, могли совпасть. Тогда, меньшее число равно меньшему, среднее - среднему, большее – большему, то есть,

 *а + в* = $\frac{1}{с}$, *а +с* = $\frac{1}{в}$, *в + с* = $\frac{1}{а}.$

Из первых двух равенств получаем *ас + вс* = 1 и *ав + вс* = 1. Вычтем из первого полученного равенства второе. Получим *ас = ав*, отсюда *с = в,* что противоречит условию. Т.е. числа, записанные первой и второй группой, не совпадают.

*5. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1,2,…7,8, 7,6,…2,1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола, игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал номер 1?*

Ответ: 20.

Решение. Заметим, что игроки под номерами 1 и 9 сидят диаметрально противоположно друг другу, поэтому сумма набранных ими очков при каждом вращении всегда равна 8. Следовательно, за 13 вращений они в сумме набрали 13 ∙ 8 = 104 очка. Поскольку игрок номер 9 набрал 84 очка, сумма очков, набранных игроком номер 1, равна 104 – 84 = 20.