Критерии оценивания выполнения олимпиадных заданий по математике

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

Ответы и решения.

Задание 1.

Архив фотографий укладывают в порядке их нумерации в одинаковые альбомы, ровно по 4 фотографии на одну страницу. При этом 81-ая по счёту фотография попала на 5-ую страницу одного из альбомов, 171-ая ─ на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает каждый альбом?

Ответ:32.

Решение.

Пусть x,y – номера альбомов, в которые попали 81-ая и 171-ая фотографии соответственно, а n –количество страниц в альбоме.

По условию $n\geq 5$. Тогда $4n(x-1)+16<81\leq 4n(x-1)+20$,

$4n(y-1)+8<171\leq 4n(y-1)+12$, то есть

$61\leq 4n(x-1)<65$, $159\leq 4n(y-1)<163$. Тогда $n(x-1)=16$, $n(y-1)=40$.

Следовательно, n – делитель чисел 16 и 40, не меньший пяти.
Такое число ровно одно: $n=8$, следовательно, $4n=32$.

Задание 2.

Том Сойер, Сид Сойер и Гек Финн красили забор. Вначале Том красил один в течение времени, за которое Сид и Гек, работая вместе, могли бы покрасить половину забора. Затем красил один Сид в течение времени, за которое Том и Гек, работая вместе, могли бы покрасить $\frac{5}{4}$ всего забора. Потом красил один Гек в течение времени, за которое Том и Сид, работая вместе, могли бы покрасить четверть всего забора. В результате весь забор был покрашен. Во сколько раз быстрее они окончили бы работу, если бы с самого начала все время работали вместе? (Предполагается, что скорость работы каждого мальчика постоянна.)

***Ответ*:** в 3 раза.

Решение.

Обозначим всю работу по окраске забора через 1, производительность Тома, Сида и Гека через x,y,z,соответственно, промежутки времени, в которые Том, Сид и Гек работали по одному через t_1, t_2 и t_3, соответственно. Тогда по условию: $(y+z)t_1 = \frac{1}{2}$; $(x+z)t_2 = \frac{5}{4}$; $(x+y)t_3 = \frac{1}{4}$.

$xt_1 + yt_2 + zt_3 = 1.$

Находим значение величины, равное отношению

$(t_1+t_2+t_3): \frac{1}{x+y+z} = (x+y+z)\,(t_1+t_2+t_3)$

Раскрывая скобки, получим

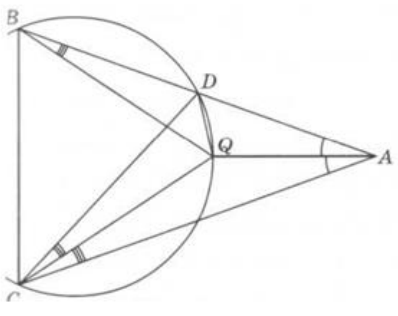
$$x\,t_1 + (y+z)t_1 + yt_2 + (x+z)t_2 + zt_3 + (x+y)t_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = 3\ .$$

Задание 3.

В треугольнике ABC, площадь которого равна 20, проведена медиана CD. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что AC=$\sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник ACD, лежит на окружности, описанной около треугольника BCD.

Ответ: $\frac{41}{10}$ или $\frac{41}{8}$

Решение.



(Рис.1)

Пусть Q – центр окружности вписанной в $\Delta\,ACD$ (рис.1)
Тогда AQ и CQ –биссектрисы углов BAC и ACD соответственно.
По свойствам вписанных углов ∠DBQ =∠DCQ.
Значит, Δ ABQ= Δ ACQ.
Следовательно, AB = AC, то есть треугольник ABC – равнобедренный.
Положим BC = 2x, тогда $S_{ABC}=x\sqrt{41-x^2}$.

Поэтому получаем уравнение $x\sqrt{41-x^2} = 20$; $x^2(41 - x^2)=400$;

$x^4 - 41x^2+400=0$; x=4 или x=5.

Радиус описанной окружности около $\Delta\,ABC$ равен $R = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S} = \frac{41\cdot 2x}{4\cdot 20} = \frac{41x}{40}$, то есть, если x =4, то $R = \frac{41 \cdot 4}{40} = \frac{41}{10}$. Если x=5, то $R = \frac{41 \cdot 5}{40} = \frac{41}{8}$.

Замечание. Условие о том, что CD – медиана, является избыточным. Решение задачи не изменится, если D – произвольная точка на стороне AB.

Задание 4.

Артем выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка [1;45], [46;90], [91;135], [136, 180]; [181;225]. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое наименьшее значение может принимать сумма тридцати чисел, выбранных Артемом?

***Ответ*:** 3165.

Решение.

Пусть $d_1, \ldots, d_6$ – числа из первого промежутка. $d_7, \ldots, d_{12}$ – числа из второго промежутка, $d_{13}, \ldots, d_{18}$ – числа из третьего промежутка и т. д. Заметим, что каждое из чисел второго промежутка представимо в виде $d_i = 45 + C_i$, где $1 \le C_i \le 45$, каждое из чисел третьего промежутка представимо в виде $d_i = 90 + C_i$, где $1 \le C_l \le 45$, и т. д.

Пусть также $C_1=d_1, \ldots, C_6=d_6$. С учетом введенных обозначений сумма данных чисел равна $6 \cdot (45+90+135+180)+C_1+C_2+\ldots+C_{30}=2700+C_1+C_2+\ldots+C_{30}$. Отметим также, что все числа $C_1, C_2, \ldots, C_{30}$ должны быть различны (если $C_i = C_j$, то разность $d_i - d_j$ делится на 45, а если $C_i \ne C_j$, то разность $d_i - d_j$ не делится на 45) . Значит, сумма чисел d_i минимальна, если C_i принимают значения от 1 до 30 (в любом порядке); это минимальное значение суммы равно $2700+1+2+\ldots+30=2700+\frac{1+30}{2} \cdot 30 = 3165$

Задание 5.

Маша и Саша играют в следующую игру. Перед ними три кучки камней. В первой из них лежит 7 камней, во второй – 9 камней, в третьей – 11 камней. За один ход разрешается взять либо один камень из любой кучки, либо взять по одному камню из любых двух кучек. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Маша ходит второй. Сможет ли она выиграть в этой игре независимо от ходов Саши?

Ответ: Маша может выиграть при определенной стратегии.

Решение.

Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию Маши. Если Саша первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то Маше следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же Саша первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то Маше следует взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом, после хода Маши в первой кучке будет лежать 6 камней, во второй – 8 камней, в третьей – 10 камней, то есть в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом Маша должна брать столько же камней из тех кучек, что и Саша, то есть после каждого хода Маши в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Маша всегда сможет сделать ход, так как после хода Саши в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, то есть хотя бы по одному. А так как Маша всегда может сделать ход, то именно она заберет последние камни из кучек и выиграет.