Критерии оценивания выполнения олимпиадных заданий по математике

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

Ответы и решения.

Задание 1.

В ожидании ужина Маша, проделала с некотором 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции, получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась. Какое число оказалось у Маши в конце.

Ответ:17.

Решение.

Пусть это число n, оканчивающееся на цифру у. Тогда n = 10х+у после очередной операции станет равным 3х+2у.

Равенство 10х+у=3х+2у равносильно 7х=у, и так как у – цифра, то у=7, х=1.

Поэтому n=17.

Задание 2.

Определите, сколькими нулями оканчивается число 2014!

***Ответ:* 501**

Решение.

Из 2014 первых натуральных чисел на 5 делятся 402 числа, из них на 25 делятся 80 чисел. Из этих 80 чисел на 125 делятся 16 чисел, из которых на 625 делятся 3 числа. Чётных чисел среди первых 2014 натуральных чисел больше, чем делящихся на 5.

Таким образом, количество нулей в конце числа 2014! определяется количеством «пятёрок» – сомножителей в этом числе. Их будет: 402+80+16+3=501.

Задание 3.

В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD перпендикулярны сторонам DC и AB, соответственно. Из точки B проведен перпендикуляр к стороне AD, пересекающий AC в точке O. Найдите AO, если AB=4, OC=6.

***Ответ:* 2**

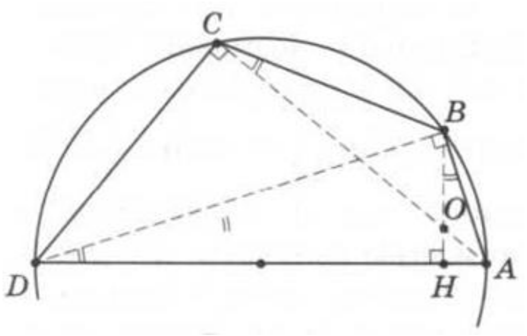

Рис.1

Решение.

Так как $\angle ABD = \angle ACD = 90^0$,

то четырехугольник вписан в окружность

с диаметром AD (рис 1.)

Поэтому $\angle ACB = \angle ADB$ (опираются на одну дугу). Так как BH – высота в прямоугольном ΔABD, то $\angle ADB = \angle ABH$. Тогда треугольники ABO и ACB подобны по двум углам

и выполняются соотношения:

$\frac{AB}{AO} = \frac{AC}{AB}, \frac{4}{AO} = \frac{AO+6}{4}$,

$AO^2+6AO - 16=0$, AO= – 8, AO=2, Значит, AO=2.

Задание 4.

Определите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней этого куба равно 8.

Ответ: 1152.

Решение.

Возьмем для определенности в качестве указанных в условии диагоналей диагонали A_1C_1 и AD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим две параллельные плоскости A_1C_1B и AD_1C, в каждой из которых лежит по одной из этих диагоналей.

Расстояние между этими плоскостями равно данному в условии расстоянию между диагоналями d. Его можно выразить через длину ребра куба a, например, рассмотрев перпендикулярное этим двум плоскостям сечение B_1D_1DB. Диагональ куба B_1D перпендикулярна обеим плоскостям и делится ими на три равные части. Получаем: $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, то есть $a = d\sqrt{3}$. Тогда $S=6a^2=6\cdot 3d^2=18d^2=18\cdot 8^2=1152$.

Задание 5.

Дано число 5300…0035 (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 22100.

Решение.

Заметим, что $495=5\cdot9\cdot11$. Делимость на 5 выполнена в любом случае, так как число оканчивается пятеркой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

Первый случай. Заменяем два нуля на местах одной четности (оба четные или оба нечетные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах [1;9], то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 9 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна 16+11=27). Подходят следующие пары цифр: 2 – 9, 3 – 8, 4 – 7, 5 – 6. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырех пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (100 способов); наконец на место той же самой четности ставим большую цифру (49 способов) – итого выходит $4\cdot100\cdot49=19600$ способов.

Второй случай. Заменяем два нуля на местах разной четности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через k), а для делимости на 9 надо, чтобы (16+2k):9. Этому условию удовлетворяет только k =1. Такая замена может быть осуществлена $50\cdot50=2500$ способами (выбираем одно из пятидесяти четных мест и одно из пятидесяти нечетных). В итоге получаем, 19600+2500=22100 способов.