Критерии оценивания выполнения олимпиадных заданий по математике

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

Ответы и решения.

Задание 1.

Даны четыре последовательных натуральных числа, больших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, больших 1.

Решение.

Пусть n, n+1, n+2, n+3 – данные числа. Сумма трех наименьших из них равна n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1), а сумма трех самых больших чисел равна (n+1)+(n+2)+(n+3)=3n+6=3(n+2). Но хотя бы одно из чисел (n+1) и (n+2) – четно, то есть равно произведению чисел 2 и k, где $k > 3$. Значит, данная сумма и представима в виде трех различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

Задание 2.

На велотреке одновременно уходят со старта 5 велосипедистов. Скорость первого равна 50 км/ч, второго – 40 км/ч, третьего – 30 км/ч, четвертого – 20 км/ч, пятого – 10км/ч. Первый велосипедист считает количество велосипедистов, которых он обогнал. Какого велосипедиста он посчитал 21 – м? В момент старта обгон не считается.

***Ответ*: Пятого, у которого скорость 10 км/ч**

Решение.

Будем считать обгоны в тот момент, когда первый догоняет второго велосипедиста. В момент, когда первый проехал 5 кругов, второй 4 круга (его скорость составляет $\frac{4}{5}$ от скорости первого), третий – 3 круга, четвертый – 2 круга, пятый – 1круг. В этот момент все велосипедисты опять находятся в одной точке. Тогда к этому моменту первый обогнал второго 1 раз, третьего – 2 раза, четвертого – 3 раза, пятого – 4 раза, то есть первый насчитал 10 велосипедистов, которых он обогнал.

После того, как первый проедет еще 5 кругов, он насчитает 10 обгонов. В этот момент все велосипедисты опять находятся в одной точке. Тогда первый обгонит и посчитает 21-м самого медленного из велосипедистов – пятого.

Задание 3.

Дан равнобедренный треугольник АВС, АВ=ВС. В окружности, описанной около треугольника АВС, проведен диаметр СС′ . Прямая, проходящая через точку С′ параллельно ВС, пересекает отрезки АВ и АС в точках М и Р соответственно. Докажите, что М – середина отрезка С′Р.

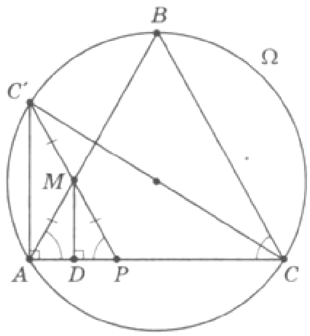

Рис. 1

Решение.
Так как СС ′ – диаметр окружности, то имеем $\angle C'AC = 90^0$. Поскольку $MP \parallel BC$, получаем $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$.
Значит, треугольник AMP – равнобедренный, и поэтому его высота MD является и медианой.
Так как AD=DP и $AC' \parallel DM$, по теореме Фалеса получаем, что $C'M = MP$.

Замечание. Есть и другие способы решения, например, с использованием подсчета углов в прямоугольном треугольнике *PAC ′;* именно, $\angle MAC' = 90^0 - \angle MAP = 90^0 - \angle ACB = 90^0 - \angle MPA = \angle MC'A$, откуда $MP = MA = MC'$.

Задание 4.

Числа $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{a+c}$; $\frac{1}{c+b}$ образуют арифметическую прогрессию.

Докажите, что числа $a^2; b^2; c^2$ также образуют арифметическую прогрессию.

Решение.

Числа a_1, a_2, a_3, образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $2a_2 = a_1 + a_3$. Поэтому из условия следует, что $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}$, то есть $\frac{a+c+2\,b}{(a+b)\,(b+c)} = \frac{2}{a+c}$. Умножив обе части последнего равенства на (a+b)(b+c)(a+c) и приведя подобные слагаемые, получим $a^2+c^2=2b^2$, что и требовалось доказать.

Задание 5.

На одном из островов Тихого океана бывшая одноэтажная казарма была переделана в гостиницу. Все номера гостиницы размещались в ряд вдоль одной стороны общего коридора и были последовательно пронумерованы числами от 1 до 65. Условия заселения в гостиницу:

- каждый посетитель мог снять в гостинице либо один номер на двое суток, либо два обязательно соседних номера на любое число суток;
- стоимость одного номера в сутки – 1 евро.

Известно, что 10, 20 и 30 августа в гостинице не был заселен *№13.* Докажите, что за аренду номеров в августе владельцы гостиницы смогли выручить не более 2008 евро.

Решение.

Составим «таблицу посещений» гостиницы; для этого расчертим прямоугольник $31 \cdot 65$ и заставим каждого посетителя расписаться в клетке на пересечении k - ой строки и ℓ –го столбца, если k - го августа он проживал в № ℓ. Кроме того, закрасим клетки таблицы в шахматном порядке.

Пусть, для определенности, клетка (1;1) – черная. Тогда всего в таблице 1008 черных и 1007 белых клеток, причем клетки (10;13), (20;13) и (30; 13) – белые. В этих трех клетках нет ничьих подписей, следовательно, всего имеется не более 1004 заполненных белых клеток. Из условия задачи видно, что каждый посетитель в черных клетках расписался столько же раз, сколько и в белых; поэтому число заполненных черных клеток также не превосходит 1004.

Значит, выручка за август не превысила $2 \cdot 1004 = 2008$ евро.